Akademisk Afhandling

Om ett vidsträktare bruk af Qvadrat- och Rutetalens tabell,

hvilken

med Vidtberömda Filofiska Fakultetens tillstånd

och under Præsidium

af

Mag. CARL JOH. D$^{\underline{s}}$ HILL,

Math. Professor, R. N. O., L. K. V. A.,

för

Filosofiska Doktorsgraden

utgifves

af

LUDVIG MAGNUS LEISSNER,

Filos. Kand., af Blekingska Nationen,

att offentligen försvaras

à Mathematiska Lärosalen den 10 Juni 1850.

IV.

Lund,
tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,
1850.

ACAD. LUGD.BAT. BIBL.

vara qvadrat af ett dylikt; men då detta är delbart med 5, måste (enl. 1) qvadrattalet vara delbart med 25, och det slutar sig endast på 25; ty om det slutade sig på 50, så kan det (enl. 4) ej vara qvadrattal.

6) Ett udda qvadrattal, när det delas med 9, går antingen jemt opp med 9, eller ger det $(1 + 3r =)$ 1, 4 eller 7 till rest.

Tillfölje häraf märkes, att

I) De jämna qvadrattalen slutas på 00, eller

$$p4 = \left\{\begin{array}{l} 04 \\ 24 \\ 44 \\ 64 \\ 84 \end{array}\right| \qquad i6 = \left\{\begin{array}{l} 16 \\ 36 \\ 56 \\ 76 \\ 96 \end{array}\right|$$

om p = jämn siffra, i = udda.

II) De udda qvadrattalen sluta sig på 025, 225, 625 eller på

$$\begin{array}{c} 0 \\ p41 \\ 8 \end{array} \text{ eller } i\begin{array}{c} 2 \\ \\ 6 \end{array}1 = \left\{\begin{array}{l} p01 \\ i21 \\ p41 \\ i61 \\ p81 \end{array}\right. \text{ eller } \left.\begin{array}{l} p09 \\ i29 \\ p49 \\ i69 \\ p89 \end{array}\right\} = \begin{array}{c} 0 \\ p49 \\ 8 \end{array} \text{ eller } i\begin{array}{c} 2 \\ \\ 6 \end{array}9$$

d. ä. $p|4n|1$ eller $p|4n|9$
eller $i\ 2(2n+1)|1$ $i|2(2n+1)|9$

7) Divideradt med 8 eller 16, måste ett qvadrattal gifva qvadrattal (nemligen 0, 1, 4, eller (vid 16) 9) till rest. Ty $(8+x)^2 - (8-x)^2 = 4.8x$, och $(4+x)^2 - (4-x)^2 = 4.4x$. Ex. $25 \underset{16}{\backsim} 9$, $81 \underset{16}{\backsim} 1$, $289 \underset{16}{\backsim} 1$ *).

8) Divideradt med 32, måste ett qvadrattal gifva ett qvadrattal (nemligen 0, 1, 4, 9, 16 eller 25) eller ock 17 till rest. Ty $(8+x)^2 - (8-x)^2 = 4.8.x$, och 6^2 ger 4, 7^2 ger 17 till rest. Ex. $1296 \underset{32}{\backsim} 296 - 24 \backsim 272 \underset{32}{\backsim} 72 + 4.2 \backsim 80 \underset{32}{\backsim} 16$. (NB. enl. 8 kunna vid qvadrering de 5 sista siffrorne pröfvas).

9) Ett qvadrattal deladt med 11 ger 1, 3, 4, 5 eller 9 (d. ä. ett qvadrattal eller 3, 5) till rest. Ty $4^2 \backsim 5$, $5^2 \backsim 3 \backsim 6^2$.

10) I allmänhet om N deladt med något tal p ger n till rest, så måste N^2 med detsamma ge n^2 eller ock den rest n^2 ger, såsom när n = 0, 1, 2, 3, 4,
8, 7, 6, 5,
och $p = 9$, så ger n^2 med 9 rest . . . . = 0, 1, 4, 0, 7.

Dervid tar man för p de värden (7, 9, 11, 13, 27, 37, 101 &c), som enligt *läran om rester och factorer* ger lättast hvarje tals (N, N^2) rester; q. v.

---

*) $a \underset{c}{\backsim} b$ betyder, att a och b lemna samma rester vid division med c.

II) Till halfvering och qvadrering.

Dertill har tabellen en särskilt ingång (den yttre) efter $W = 2\,V$, så att ytterst står delarne af $2\,V$ (nemligen hundratalen i öfversta raden, och de öfriga i första spalten), under det innantill (i deras kryss) står V^2.

Ex. (i minsta tabellen) $2x = 148 = 14,\ 8 = 14,$ (öfverst) $+$, 8 (ytterst till venster), hvaremot svarar $\left(\frac{148}{2}\right)^2 = x^2 = 5476\ (= 74^2)$. Äfvenså $\left(\frac{164}{2}\right)^2 = 6724$.
Ex. (i större tabellen) $(\frac{1}{2}\,.\,6|18)^2 = 95481$.

Obs. Härvid bör w $(= 2x)$ vara jemt; skulle det förekomma udda, så bör i stället rutetalet brukas. Ex. $\left(\frac{165}{2}\right)^2 = \left(\frac{164}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = (82 + \frac{1}{2})^2 = 82^2_1 + \frac{1}{4} =$
$= \left(\frac{165}{2}\right)_1 + \frac{1}{4} = 6806\frac{1}{4}$.

Tabellen härföre utsträckes till ett dubbelt eller mångdubbelt antal enligt den (eller de) vid qvadrering använda formlen. Ty multipliceras denna med $(\frac{1}{2})^2$, så fås

$$\left(\frac{at+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 . t^2 + \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) t + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Dock bör man först laga, att a blir jemn.

Ex. 1. $$\left(\frac{16476}{2}\right)^2 = \begin{cases} \left(\frac{164}{2}\right)^2 . 100^2 + \left(\frac{76}{2}\right)^2 = 6724|1444 \\ \left(\left(\frac{164}{2}\right)^2 + \left(\frac{76}{2}\right)^2\right) . 100 = \quad 81|68 \\ - \quad \left(\frac{88}{2}\right)^2 . 100 = -19|36- \end{cases}$$
$$= 6786|4644.$$

Ex. 2. Begäres $\left(\frac{6748}{2}\right)^2 = \left(\frac{68|\overline{52}}{2}\right)^2$.

$$= \left(\frac{6800-52}{2}\right)^2 = \begin{cases} \left(\frac{68}{2}\right)^2 100^2 + \left(\frac{52}{2}\right)^2 = 1156|0676 \\ -\left(\left(\frac{68}{2}\right)^2 + \left(\frac{52}{2}\right)^2\right) . 100 = -18|32- \\ + \left(\frac{68-52}{2}\right)^2 . 100 = \quad |64 = \left(\frac{16}{2}\right)^2 . 10^2 \end{cases}$$
$$\text{gör} = 1138|3876.$$

Eller också $= \left(\frac{67'48}{2}\right)^2 = \left(\frac{6600+148}{2}\right)^2 =$

$$\left.\begin{cases} 1089|5476 \\ +\ 65|65 \\ -\ 16|81 - \ldots \left(= -\left(\frac{82}{2}\right)^2\right) \end{cases}\right\}$$
$$= 1138|3876.$$

Ex. 3.
$$\begin{array}{rr|ll}
 & \alpha & \beta & \\
\left(\frac{16476|6748}{2}\right)^2 = & 6786'4644 & 1138'3876, & \\
 & 7924 & 8520 & = (\alpha+\beta)\,.\,T \\
 & \left\{ -\;2304 \right. & \left. 4096\;- \right\} & \\
-\left(\frac{9728}{2}\right)^2 T = & \left\{ -\;\;\;64 \right. & \left. 00\;\;\;- \right\} & \\
 & \left\{ +\;\;\;\;2 \right. & \left. 56 \right\} & \\ \hline
\text{gör} = & 6787\,0203 & 1162\,3876 &
\end{array}$$

Anm. 1. Ur den större tabellen fås faciterne till Ex. 1 & 2 omedelbart, äfvensom $\left(\frac{9728}{2}\right)^2$ hvarigenom Ex. 3 genast affärdas.

Ex. 4.
$$\begin{array}{rr|ll}
(\tfrac{1}{2}\,V)^2 = \left(\frac{233'682}{2}\right)^2 = & 13'456 & 707'281 & = (\tfrac{1}{2}\,.\,23\overset{+1'}{2}682)^2 \\
 & 720 & 737 & \\
\left(-\left(\frac{1450}{2}\right)^2 =\right) & -525 & 625- & \\ \hline
(\tfrac{1}{2}\,V)^2 = & 13\,631 & 819\,281. &
\end{array}$$

Ex. 5.
$$\begin{array}{rr|ll}
\left(\frac{233'546}{2}\right)^2 = & 13'456 & 597'529 & \\
 & 610 & 985 & \\
(-\tfrac{1}{2}\,.\,(1546-232))^2 = & -431 & 649 & = -(\tfrac{1}{2}\,.\,1314)^2 \\ \hline
 & 13\,635 & 933\,529. &
\end{array}$$

Ex. 6.
$$\begin{array}{rr|l}
\left(\frac{1922'800}{2}\right)^2 = & 923'521 & 160'000 \\
 & 1083 & 521 \\
\left(-\left(\frac{1122}{2}\right)^2 =\right) & -\;314 & 721\;- \\ \hline
\text{gör} = & 924\,289 & 960\,000.
\end{array}$$

Ex. 7. Begäres
$$\begin{array}{rr|l}
\left(\frac{1340'632}{2}\right)^2 = & 448'900 & 099'856 \\
 & 548 & 756 \\
(-708^2 =) & -\;125 & 316 \\ \hline
\text{gör} = & 449\,323 & 539\,856.
\end{array}$$

Ex. 8.
$$\begin{array}{rr|l}
\left(\frac{176'294}{2}\right)^2 = & 7'744 & 021'609 \\
 & 29 & 353 \\
 & -\;3 & 481\;- \\ \hline
 & 7\,169 & 893\,609.
\end{array}$$

Anm. 2. Tabellen för qvadraterna på hälften kan lätt utsträckas till en sifra mera enligt formlen:

$$\left(\frac{a+e}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2\varepsilon}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \varepsilon a + \varepsilon^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{e}{2}.a + \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Så fås ur minsta tabellen (för $a < 200$), $\left(\frac{138|2}{2}\right)^2 = \left\{\begin{array}{r|l} 4761 & 01 \\ +13 & 8 \end{array}\right\}$

$$= 4774\ 81$$

Dock bör ε tas negativ, om $e = 2\varepsilon > 10$.

$$\text{Ex. } \left(\frac{1332}{2}\right)^2 = \left(\frac{133|2}{2}\right)^2 = \left(\frac{1340-8}{2}\right)^2 = \left\{\begin{array}{r|l} 4489 & 16 \\ -53 & 6 \end{array}\right. = 4.1340$$

$$= 4435\ 56$$

Anm. Prof de samma som för qvadrattalen.

III). Till ruteläggning (pronicering)

eller *rutetäljning* (liksom tälja, huru många rutor der äro i ett fenster t. ex. $2.3 = 6$ $(= 2^2_1)$, eller $= n.(n+1) = n^2_1$, om der äro n i bredd och en mera i höjd).

a) När rutans bas (fot) *(n) finnes i tabellen,* så utskrifves rutetalet enligt dennes beskrifning.

Ex. $34^2_1 = 1190$. $73^2_1 = 5402$. $617^2_1 = 381306$.

b) När den (n) är större än tabellens grens.

Efter $(at+b)^2_1 = (at+b)(at+b+1) = a^2t^2 + (2b+1)\,at + b^2_1$, och således särdeles, när $t = -1$, $(b-a)^2_1 = a^2 - (2b+1)\,a + b^2_1$, så fås häraf $(2b+1)\,a = a^2 + b^2_1 - (b-a)^2_1$, hvarföre $(at+b)^2_1 = a^2t^2 + (a^2 + b^2_1 - (b-a)^2_1)\,t + b^2_1$; Dervid bör b tas så stort att a blir jemnt. Om deremot $b<a$, så tages för $(b-a)^2_1 = (b-a).(b-a+1) = (a-b).(a-b-1) = (a-b-1)^2_1$. Äfvenså är $(-b)^2_1 = (b-1)^2_1$.

Således utsträckes rutetabellen med tillhjelp af qvadrattabellen.

$$\begin{array}{rrcr|l}
 & a\quad b & & a^2 & b^2_1 \\
\text{Ex. 1.} & 235|467^2_1 & = & 55225 & 218\ 556 \\
 & & & +273 & 781 \\
 & -\ 232^2_1 & = & -\ 54 & 056\ \ - \\
\hline
\text{fenstret till} & 235\ 467 & = & 55444 & 943\ 556.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr|r|l}
\text{Ex. 2.} & 35|467^2_1 & = & 1\ 225 & 218 & 556 \\
 & & & 219 & 781 & \\
 & -\ 432^2_1 & = & -187 & 056 & - \\
\hline
 & 35\ 467^2_1 & = & 1\ 257 & 943 & 556.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlcr|l}
\text{Ex. 3.} & 5437^2_1 = 54^2.100^2 + 37^2_1 & = & 2916 & 1406 \\
 & \left\{\begin{array}{l} +(54^2+37^2_1).100 \\ -\quad 16^2_1\ .100 \end{array}\right\} & & \begin{array}{r} +43 \\ -\ 2 \end{array} & \begin{array}{l} 22 \\ 72\ - \end{array} \\
\hline
 & \text{gör} & = & 2956 & 6406.
\end{array}$$

Cor. 1. Om a & t förvexlas, så fås också $(at + b)^2_1 = a^2t^2_1 + b^2_1 + (b^2_1 - (b-a)^2_1)t = a^2_1 t^2 + b^2_1 + (b^2_1 - (b-t)^2_1)a$.

Cor. 2. $(b-a)^2_1 t - b^2_1 (t-a) - (b-t)^2_1 a = a^2t^2_1 - a^2_1 t^2 =$ oberoende af b.

Cor. 3. $(b-a)t - b(t-a) = (b-t)a$.

Cor. 4. Särdeles är $(a.10 + b)^2_1 = a^2_1.100 + b^2_1 + (b^2_1 - (10-b-1)^2_1).a = a^2.110 + b^2_1 + (b^2_1 - (a-b-1)^2_1).10$, som kan tjena att utvidga tabellen till en sifra mera.

Ex. 4. Begäres 5437^2_1 med en tresifrig tabell:

$$
\begin{array}{rr|l}
(a^2 = 543^2 =).110 = & 294849 & 56 = b^2_1 \\
 & 29484 & 90 \\
 & +\ 5 & 6. \\
-535^2_1 = & -28676 & 0. \\
\hline
5437^2_1 = & 295664 & 06.
\end{array}
$$

Men $a^2 - (a-\varrho)^2_1 = (2\varrho - 1)a - (\varrho - 1)^2_1$ & $a^2 - (a-b-1)^2_1 = (2b+1)a - b^2_1$; $(a10+b)^2_1 = a^2 10^2 + (2b+1)a \cdot 10 + b^2_1$ samt $(a \cdot 10 - b)^2_1 = a^2 \cdot 10^2 - (2b-1)\, a \cdot 10 + (b-1)^2_1$.
således blir ock $5437^2_1 = (544\bar{3})^2_1 = 544^2 \cdot 10^2 - 5 \cdot 544 \cdot 10 + 2^2_1 = 295936\,06$

$$
\begin{array}{r}
295936\ 06 \\
-\ 272\ 0 \\
\hline
= 295664\ 06.
\end{array}
$$

$$
\text{Också} = 5437^2 + 5437 = (544\bar{3})^2 + 5437 =
\begin{array}{r|l}
295936 & 09 \\
-\ 326 & 4 \\
+\ 54 & 37 \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{= 295664\ 06.}
\end{array}
$$

Man kan ock räkna på något af dessa 3 sätt:

$$
\begin{array}{rr|r|l}
 & a^2 & b^2_1 & \\
\text{Ex. 5.}\ \alpha)\ (5|467)^2_1 = & 25 & 218 & 556 \\
 & +218 & 581 & \\
462^2_1 = & -213 & 906 & -\ (62^2_1 = 3|906| \\
\hline
 & 29 & 893 & 556
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|l}
\beta)\ \text{eller} = & (54|67)^2_1 = & \\
= & 2916 & 4556 \\
 & +74 & 72 \\
-13^2_1 = & -\ 1 & 82\ - \\
\hline
 & 2989 & 3556
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
\gamma)\ \text{eller} = & (546|7)^2_1 = & \\
 & 298116 & 56 \\
 & +29817 & 2 \\
-(-539)^2_1 = & -28998 & 2\ -\ (= -538^2_1) \\
\hline
 & 298935 & 56
\end{array}
$$

Af dessa tre sätt äska α) & γ) alltför stora + & — tillägg, hvarföre β) synes bäst, såsom äskande räkning med mindre tal; fast man då ej har större nytta af den 3-siffrige än af den 2-siffrige tabellen. Eller kan man räkna helst efter någon af följande formler:

$$(10a + y)^2_1 = 100 \cdot a^2 + (2y + 1)\, a \cdot 10 + y^2_1 \text{, eller}$$
$$(10a + y)^2_1 = a^2_1 \cdot 100 + (2u + 1)\, a \cdot 10 + y^2_1 \text{, om } y = 5 + u.$$

Såsom $a = 546$, $y = 7 = 5 + 2$, $u = 2$, $2u + 1 = 5$.

$$\begin{array}{rr|l}
546^2_1 = & 298662 & 56 = 7^2_1 \\
5 \cdot 546 = & +273 & 0 \\
\hline
 & 298935 & 56 = 5467^2_1.
\end{array}$$

$$\text{eller } y = 2;\quad \begin{array}{rr|l}
546^2 = & 298116 & 06 = 2^2_1 \\
5 \cdot 546 = & +273 & 0 \\
\hline
 & 298389 & 06 = 5462^2_1.
\end{array}$$

Såsom alltid, göres här multiplikation med 10,100 förmedelst blotta uppställningen.

Anm. I brist af rutetabell kan man följa formlen $n^2_1 = n^2 + n$, enligt hvilken rutetalen kunna uträknas med qvadrattabellen.

$$\text{så: } \begin{cases} n = & 54 \mid 37 \\ n^2 = & \begin{cases} 2916 \mid 13\ 69 \\ \quad 42 \mid 85 \\ -\ 2 \mid 89 \end{cases} \end{cases}$$
$$n^2_1 = 2956\ 64\ 06.$$

Anm. Nicomachus (som skref en Gr. arithm. omkring *A.C.* 100) anför i sin Isagoge följande egenskaper af dessa tal: (*τετραγωνος* $= x^2$ och *ἑτερομήκης* $=$ $= x^2_1 =$ altera parte longior hos Boethius).

a) qvadrattalens differenser äro alla udda tal och rutetalens alla jemna, nemligen:

$$\begin{cases}
\triangle x^2 = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17 & \\
x^2 = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81 & \text{om } n^2 = n.n \\
\triangle = x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 & \\
x^2_1 = 0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42,\ 56,\ 72,\ 90 & n^2_1 = n.(n+1) \\
\triangle x^2_1 = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18 &
\end{cases}$$

b) $\frac{1}{2} . x^2_1 = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 = (x + 1)_2 =$ Trig. tal.

c) $x^2_1 - x^2 = x =$ enkla talserien.

d) x^2_1 är *επιμοριος* till $x^2 \left(= 1 + \frac{1}{x}\right)$ och äfvenså $(1 + x)^2$ till x^2_1,

nemligen $6 : 4 =$ *ἡμιολιος* $(= 1\frac{1}{2})$, $12 : 9 =$ *επιτριτος* $(= 1 + \frac{1}{3}) = 16 : 12$.

Cor. $x^2 : x^2_1 = x^2_1 : (x + 1)^2$. Ex. $4 : 6 = 6 : 9$.

e) $x^2 < x^2_1 < (x + 1)^2$

f) $x^2 + 2x^2_1 + (x + 1)^2 = \square = (2x + 1)^2$

§ $(x-1)^2_1 + 2x^2 + x^2_1 = \square = (2x)^2$

g) $\begin{cases} x^2 + x^2_1 = \dfrac{(2x)(2x + 1)}{2} = (2x + 1)_2 \\ x^2_1 + (x + 1)^2 = (2x + 2)_2 \end{cases}$ äro successiva Trigonaltal.